MARIÑO

Trigonometría Rectilínea

LA CORUÑA

Imprenta y Fotograbado de Ferrer - Real, 61

1903

ELEMENTOS DE TRIGONOMETRIA RECTILÍNEA

ELEMENTOS
DE
TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

POR

D. Victorino Miguel Mariño Ortega

Oficial de Infantería

LA CORUÑA
IMPRENTA Y FOTOGRABADO DE FERRER
CALLE REAL, NUMERO 61

1903

Dedicada al ilustre matemático

D. Valentín Morán

TRIGONOMETRÍA RECTILÍNEA

LECCIÓN 1.ª

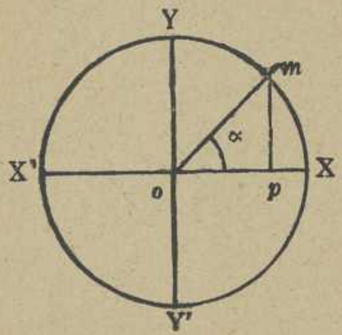
Definición y concepto de la Trigonometría

1. La Trigonometría es la ciencia que tiene por objeto la resolución numérica de los triángulos rectilíneos ó esféricos; en el primer caso se llama rectilínea y en el segundo esférica.

2. Sabido es que los elementos de un triángulo son seis, y que para resolverlo, es necesario conocer tres de ellos, así como que entre los elementos conocidos, figure siempre un lado por lo menos; pues cuando entran solo ángulos en los datos, resulta el problema indeterminado; así como también cuando se conocen solo los tres lados, deben cumplir con las condiciones de que *un lado cualquiera, sea menor que la suma y mayor que la diferencia de los otros dos* condiciones que quedan satisfechas con la de que, *el mayor de los tres lados sea menor que la suma de los otros dos.*

3. En Geometría, tomábamos por valor del ángulo, el arco comprendido entre sus lados y descripto desde el vértice como centro con un radio cualquiera. En Trigonometría reemplazamos este valor por magnitudes rectilíneas, que guardan entre sí y con los arcos, ciertas relaciones, llamadas líneas trigonométricas, cuyo estudio y el de su aplicación á la resolución de los triángulos, constituirá el concepto de la Trigonometría.

4. *Sistema de ejes coordenados.*—Se llama así, á un sistema de dos rectas que se cortan, formando un ángulo cualquiera, recto, agudo ú obtuso; en el primer caso, se llama el sistema rectangular, y en los demás oblícuo.



(Figura 1.ª)

Ordenada de un punto sobre un eje, es la perpendicular bajada desde el punto al eje; y *abscisa* de él, es la distancia que hay desde el punto donde se cortan los ejes hasta el pie de la ordenada. A la ordenada y abscisa de un punto se las llama coordenadas del punto.

Supongamos una circunferencia (figura 1.ª) y en ella dos diámetros perpendiculares; la ordenada del punto *m* sobre el eje X X' (que para abreviar se llama eje de las X), será *m p*, y la obscisa es *o p*. El punto *o* es el origen de las coordenadas.

Generalmente se cuentan las obscisas sobre el eje de las X, ó sobre sus paralelas y las ordenadas sobre el eje de las Y ó sobre paralelas á él.

5. *Signos de las coordenadas.*—Se consideran abscisas positivas, las contadas del origen *o* hacia la derecha, y negativas á la izquierda.

Las ordenadas son positivas del origen hacia arriba y negativas del origen hacia abajo. En general podremos decir, que toda magnitud rectilínea que se encuentre por encima del eje de las X, es positiva; y será negativa, si está por debajo del referido eje.

Signos de los arcos.

6. Se considera como origen de los arcos el punto X, y son positivos los contados en la dirección X Y X' Y', (fig. 1.ª), y negativos los contados en la opuesta.

Líneas trigonométricas.

7. Las principales líneas trigonométricas son las siguientes:

Seno.—Se entiende por **seno** de un arco, á la relación que existe entre la ordenada de un punto tomado sobre la recta ó lado que engendra el ángulo, y el radio, siendo este radio la distancia de aquel punto al origen: Así, pues, sen. $\alpha = \frac{mp}{om} = \frac{mp}{1} = mp.$

Resulta que el seno de un arco podremos definirlo diciendo, que es la perpendicular bajada desde uno de los extremos del arco, hasta su encuentro con el radio que pasa por el otro extremo.

Suponemos que el radio es igual á la unidad, puesto que es arbitrario y puede tener cualquier valor; además, bajo esta base están calculadas las tablas de logaritmos trigonométricas.

8. *Signo del seno.*—De lo dicho en el párrafo 5, se deduce que el seno será positivo si el ángulo termina en el 1.º ó 2.º cuadrante, y será negativo si termina en el 3.º ó 4.º.

9. *Variación del seno.*—Supongamos que el ángulo sea cero; en este supuesto, la ordenada es $m\,p = 0$; el radio es 1, luego sen. $0 = \frac{0}{1} = 0$.

Si el ángulo empieza á aumentar, aumentará la ordenada, y cuando aquél se haga igual á 90°, ésta se hace igual radio, de donde resulta sen. $90° = \frac{1}{1} = 1$.

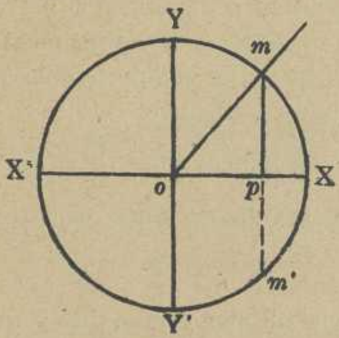
De 90° á 180°, el seno disminuye, hasta tomar el valor $\frac{0}{1} = 0$.

De 180° á 270° sigue disminuyendo hasta tomar el valor $\frac{-1}{1} = -1$.

Al pasar el ángulo de 270°, el seno empieza á aumentar hasta que llega á 360° en que toma el mismo valor que cuando el ángulo era igual á 0; luego sen. $360° = 0$.

Si el ángulo siguiera aumentando, el seno volvería á pasar por los mismos estados de magnitud, y por lo tanto, que podríamos definir el seno diciendo; *que es una fracción periódica cuyo período es 2 π, es decir, la circunferencia.*

10. Para terminar el estudio de esta línea, supongamos una circunferencia (figura 2.ª) y en ella un arco cualquiera $x\,m$. Tracemos el seno y prolonguemos hasta m'.



(Figura 2.ª)

Según sabemos por Geometría el diámetro X X' divide á la cuerda $m\,m'$ y al arco $m\,X\,m'$, en dos partes iguales; luego podremos escribir $m\,p = \frac{1}{2}\,m\;m'$, y $m\,\mathrm{X} = \frac{1}{2}\,m\,\mathrm{X}\,m'$, y como $m\,p$ es el seno del arco $m\,\mathrm{X}$, y éste es mitad del $m\,\mathrm{X}\,m'$, podríamos definir el seno diciendo *que es la mitad de la cuerda que subtiende el arco doble.*

Esta propiedad, es de tal importancia, que nos permite calcular directamente los senos de todos los ángulos, cuyo arco medida sea alguno de los subtendidos por lados de polígono regular.

Por último, diremos que de las consideraciones expuestas en el núm. 9, se deduce que esta línea trigonométrica no puede tener un valor cualquiera, siendo su mayor valor la unidad, y el menor menos la unidad.

11. **Coseno.**—(Figura 1.ª) Se entiende por **coseno** de un ángulo, la relación que existe entre la abscisa de un punto tomado sobre la recta ó lado que engendra el

ángulo y el radio de aquel punto al orígen. Así, pues, cos. $\alpha = \frac{op}{om} = \frac{op}{1} = op$.
Luego podremos decir, que el coseno de un arco, es la distancia del origen al pie del seno.

12. *Signo.*—De lo dicho en el núm. 5, se deduce, que si el ángulo termina en el 1.º ó 4.º cuadrante, el coseno será positivo; y en el 2.º y 3.º, negativo.

13. **Variación.**—Si el ángulo fuera cero, el coseno sería, cos. $0 = \frac{1}{1} = 1$.

Si aumenta el ángulo hasta 90º, el cos. disminuye hasta **0**; es decir que cos. $90^o = \frac{0}{1} = 0$.

Si continúa aumentando el ángulo, el coseno sigue disminuyendo, hasta que cuando el ángulo vale 180º, que el coseno se hace igual á -1, pues cos. $180^o = \frac{-1}{1} = -1$. Desde 180º á 270º, el coseno vuelve á aumentar hasta hacerse igual á cero.

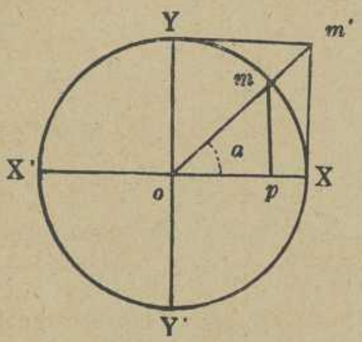
Llega el ángulo á 360º y toma el coseno el mismo valor que para $\alpha = 0$; luego cos. $360^o = 1$.

Luego esta línea trigonométrica varía también entre $+1$ y -1, lo mismo que el seno.

14. *Tangente.*—Se llama tangente, á la relación que existe entre la ordenada de un punto, tomado sobre la recta ó lado que engendra el ángulo y la abscisa del mismo punto.

Así pues, (fig. 3.ª) tag. $\alpha = \frac{m\,p}{o\,p} =$ pero por un punto X de una curva, siempre se puede trazar una tangente, y trazando la $X\,m'$ se forma el triángulo $X\,m'\,o$, semejante al $m\,o\,p$ (por el teorema de Tahles) luego $\frac{m\,p}{o\,p} = \frac{m'X}{o\,X}$" y como $\frac{m\,p}{o\,p} =$ $=$ tag. α se verifica igualmente que tag. $\alpha = \frac{m'X}{o\,X} =$ $= \frac{m'X}{1} = m'X$" que traducida al lenguaje nos dice:

La tangente trigonométriea, es la parte de tangente geométrica trazada por uno de los extremos del arco, hasta su encuentro con el radio que pasa por el otro extremo.



(Figura 3.ª)

15. *Signo.*—El signo depende del que tengan la ordenada y abscisa; de modo que si las dos son positivas ó negativas, la tangente será positiva: y si una de aquellas es negativa, la tangente lo será igualmente: y en general podemos decir, que si la tan-

gente está por encima del eje de las X será positiva, y si está por debajo, será negativa.

16. *Variación.*—Supongamos que el ángulo sea cero; en este caso la ordenada, es cero, y la obscisa igual al radio: luego tag. $0 = \frac{0}{1} = 0$.

Si el ángulo aumentara hasta 90° sería tag. $90^{\circ} = \frac{1}{0} = \infty$, lo cual no podía menos de suceder, puesto que la tangente en uno de los extremos de un arco de 90° es paralela al radio que pasa por el otro extremo, luego estas dos rectas se encontrarán en el infinito.

Si el ángulo sigue aumentando, cuando llegue á valer 180° la tangente será tag. $180^{\circ} = \frac{0}{1} = 0$.

De 180° á 270° sigue disminuyendo, y cuando el ángulo tiene el valor de 270° la tangente será tag. $270^{\circ} = \frac{-1}{0} = -\infty$.

De 270° á 360° empieza á aumentar desde $-\infty$ á 0, que tomará este último valor cuando el ángulo sea igual á 360°.

De lo dicho se infiere, que esta línea trigonométrica puede tener un valor cualquiera, puesto que varía entre $+\infty$ y $-\infty$.

17. *Cotangente.*—Es la inversa y del mismo signo que la tang.; luego cot. $\alpha = \frac{oX}{m'X}$, pero si por el punto Y trazamos una tangente Y m', se formará el triángulo $m'Yo$ semejante al Xom' por ser equiángulos, luego $\frac{oX}{m'X} = \frac{m'Y}{Yo} = \frac{m'Y}{1} = m'Y$, y como $\frac{oX}{m'X} =$ cot. α, resulta igualmente cot. $\alpha = m'Y$, es decir, que podremos definir la cotangente diciendo, que es la tangente del ángulo complementario.

18. *Signo.*—El signo de esta línea es el mismo que corresponda á la tangente.

19. *Variación.*—Si examinamos los valores de la abscisa y ordenada, con arreglo á los que tenga el ángulo, deduciremos que esta línea tomará valores inversos á los de la tangente en casos análogos; luego podremos escribir cot. $0 = \frac{1}{0} = \infty$, cot. $90^o = \frac{1}{\infty} = 0$, cot. $180^o = -\infty$, cot. $270^o = \frac{1}{\infty} = 0$, cot. $360^o = \frac{1}{0} = \infty$.

Luego esta línea puede tener también cualquier valor.

LECCIÓN 2.ª

Funciones complementarias y suplementarias

20. Dos ángulos $\pm\alpha$ y $\pm\alpha'$ son complementarios, cuando su suma es igual á $\frac{\pi}{2}$.

Si uno de los ángulos es positivo y menor que 90° el complementario también será positivo y menor que 90°.

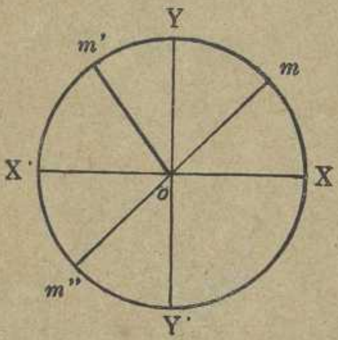
En efecto; $(\pm\alpha)+(\pm\alpha')=\frac{\pi}{2}$, despejando de esta igualdad los valores de $\pm\alpha$ y $\pm\alpha'$, el cálculo siguiente evidencia la proposición, así como también *que si el ángulo dado, es negativo, el complemento tiene que ser necesariamente positivo,* se verifican las siguientes limitaciones:

$$\pm\alpha'=\frac{\pi}{2}-(\pm\alpha)\left\{\alpha>0\left\{\begin{array}{l}\alpha<90^{\circ}.+\alpha'=\frac{\pi}{2}-(+\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha=\text{positivo.}\\[2ex] \alpha>90^{\circ}.+\alpha'=\frac{\pi}{2}-(+\alpha)=\frac{\pi}{2}-\alpha=\text{negativo.}\end{array}\right.\right.$$

$$\pm\alpha=\frac{\pi}{2}-(\pm\alpha')\left\{\alpha<0,\ \alpha\gtrless 90^{\circ}.+\alpha'=\frac{\pi}{2}-(-\alpha)=\frac{\pi}{2}+\alpha=\text{positivo.}\right.$$

Gráficamente podemos comprobar estos resultados. (Fig. 4.ª)

Supongamos primero un ángulo X $o\,m$ positivo y menor que 90º.



(Figura 4.ª)

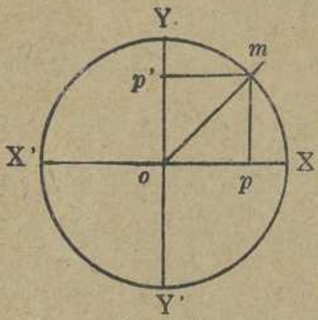
El complemento de dicho ángulo sera $\frac{\pi}{2}$ — X $o\,m$ = = (X $o\,m$ + $m\,o$ Y) — X $o\,m$ = $m\,o$ Y" que como vemos es positivo y menor que 90º.

Si el ángulo fuera mayor que 90º. y positivo, tal como X $o\,m'$ su complemento sería $\frac{\pi}{2}$ — X $o\,m'$ = = X o Y — (X o Y + Y $o\,m'$) = X o Y — X o Y — — Y $o\,m'$ = — Y $o\,m'$ que es negativo.

Por último si el ángulo es negativo, ya sea mayor ó menor que 90º el complemento es positivo: Sea el ángulo — X $o\,m''$ su complemento será $\frac{\pi}{2}$ — (— X $o\,m''$) = $\frac{\pi}{2}$ + X $o\,m''$ valor positivo; como no podía menos de suceder; luego vemos que está de acuerdo con el cálculo algebráico.

21. Supongamos ahora dos ángulos complementarios, tales como X $o\,m$ y $m\,o$ Y,

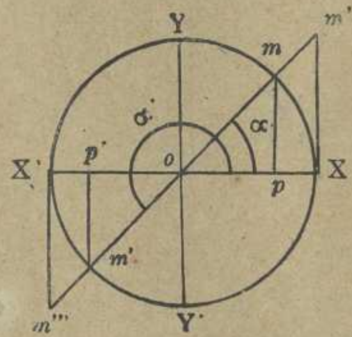
trazando los senos y cosenos, se observa en la (Figura 5.ª), que $m\ p = p'\ o$ y $o\ p = p'\ m$ por segmentos de paralelas, comprendidos entre paralelas, que traducidas al lenguaje nos dicen, *que el seno del uno, es igual al coseno del complemento, y recíprocameute.*



(Figura 5.ª)

Proposición análoga podríamos establecer para las tangentes y cotangentes.

22. Supongamos dos ángulos que se diferencien en π, tales como los α y α' (Figura 6.ª)



(Figura 6.ª)

Tenemos que trazando los senos se forman los triángulos $m\ o\ p$ y $m'\ p'\ o$ que son iguales por ser rectángulos y tener la hipotenusa y un ángulo agudo iguales; de donde se deduce que los catetos son dos á dos iguales; pero el $m\ p$, está por encima del eje de las X y el $m'\ p'$ por debajo luego el 1.º es positivo y el 2.º negativo; idéntica propiedad tienen los coseno $o\ p$ y $o\ p'$ luego concluiremos diciendo, que los senos y cosenos de dos ángulos cuya diferencia es π; son iguales, pero de signos contrarios; en cuanto á las tangentes serían iguales en magnitud y signo.

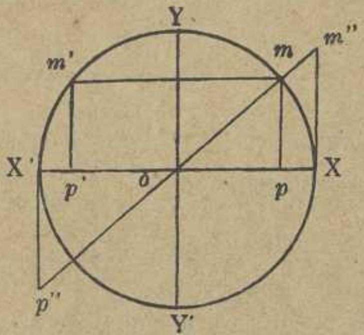


Figura 7.ª

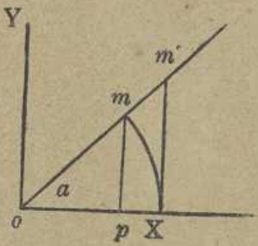
23. Dos ángulos son suplementarios, cuando la suma es igual á π. Tales son los X *o m* y *m o* X' (Figura 7.ª). Trazando los senos, cosenos y tangentes de estos ángulos, se observa, que los senos *m p* y *m' p'* son iguales y del mismo signo, lo primero por partes de paralelas, y lo segundo por estar por encima del eje de las X.

En cuanto á los cosenos y tangentes son también igeales, pero los signos son contrarios.

LECCIÓN 3.ª

Fórmulas Trigonométricas

24. Supongamos un ángulo cualquiera X $o\,m'$ (Fig. 8.ª) que para mayor facilidad llamaremos **a** „ tendremos $\left.\begin{matrix}\text{sen. } a = m\,p \\ \text{cos. } a = o\,p\end{matrix}\right\}$ elevando al cuadrado $\left.\begin{matrix}\text{sen.}^2\, a = m\,p^2 \\ \text{cos.}^2\, a = o\,p^2\end{matrix}\right\}$ sumando miembro á miembro, y observando que el segundo miembro de la suma sería igual al cuadrado del radio, se tiene $\text{sen.}^2\, a + \text{cos.}^2\, a = m\,p^2 + o\,p^2 =$ $= o\,m^2 = 1^2 = 1$ que es la 1.ª fórmula trigonométrica.



(Figura 8.ª)

De esta fórmula se deduce; $\left\{\begin{matrix}\text{sen. }^2 a = 1 - \text{cos. }^2 a \\ \text{cos. }^2 a = 1 = \text{sen. }^2 a\end{matrix}\right\}$ de donde $\left\{\begin{matrix}\text{sen. } a = \pm\sqrt{1 - \text{cos.}^2\, a}\text{„} \\ \text{cos. } a = \pm\sqrt{1 - \text{sen.}^2\, a}\text{„}\end{matrix}\right\}$ La 1.ª de estas nos da el valor del seno en función del coseno; y la 2.ª el coseno en función del seno.

Si dividimos el valor del seno por el del coseno tendremos $\frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} = \frac{mp}{op}$ y como los triángulos $p\,o\,m$ y X O m' son semejantes, podremos escribir $\frac{mp}{op} = \frac{m'X}{oX}$ sustituyendo resulta $\frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} = \frac{m'X}{oX} = \frac{m'X}{1} = \text{tag. } a$ que nos da el valor de la tangente en función del seno y coseno.

Si la división la hubiéramos hecho en orden inverso, deduciríamos $\frac{\text{cos. } a}{\text{sen. } a} = \text{cot. } a$

El producto de la tangente por la cotangente del mismo ángulo es igual á la unidad; en efecto, $\text{tag. } a \times \text{cot. } a = \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} \times \frac{\text{cos. } a}{\text{sen. } a} = 1$ como producto de dos fracciones inversas.

Si dividimos por cot. a resulta $\text{tag. } a = \frac{1}{\text{cot. } a}$ y despejando igualmente el valor de la cot. a se tiene $\text{cot. } a = \frac{1}{\text{tag. } a}$ fórmulas que nos dan el valor de la tangente en función de la cotangente y recíprocamente.

Si en la fórmula $\text{tag. } a = \frac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a}$ sustituimos el sen. a por su valor, tendremos,

$\text{tag. } a = \dfrac{\sqrt{1 - \cos.^2 a}}{\cos.\ a}$ y si en la misma fórmula sustituimos el valor del cos. a resulta

$\text{tag. } a = \dfrac{\text{sen. } a}{\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}$ las cuales nos dan el valor de la tangente en función del coseno ó en función del seno.

Haciendo las mismas sustituciones en la fórmula de la contangente, tendremos

$$\cot.\ a = \frac{\cos.\ a}{\sqrt{1 - \cos.^2 a}} \quad \cot.\ a = \frac{\sqrt{1 - \text{sen.}^2 a}}{\text{sen. } a}$$

25. Con las fórmulas halladas, se pueden siempre hallar las líneas trigonométricas cuando se conozca una de ellas.

Supongamos que se conoce el seno, y se quieren hallar el coseno, la tangente y la cotangente.

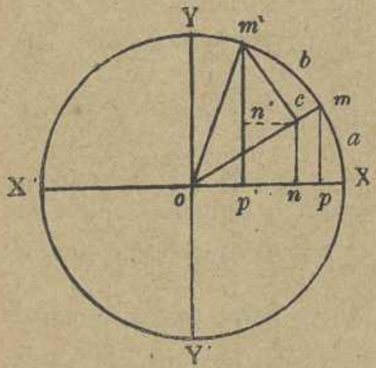
Sea por ejemplo sen. $a = h$

$$\cos.\ a = \sqrt{1 - h^2} \quad \text{tag. } a = \frac{h}{\sqrt{1 - h^2}} \quad \cot.\ a = \frac{\sqrt{1 - h^2}}{h}$$

LECCIÓN 4.ª

Valor del seno y coseno de la suma y de la diferencia de dos arcos.

26. Supongamos dos arcos X m y $m\ m'$ (figura 9.ª) que para abreviar llamaremos a y b; trazando los senos y cosenos de estos arcos, así como el seno y coseno del X m', suma de los dados, resulta segun la figura.



(Figura 9.ª)

sen. $a = m\ p$
cos. $a = o\ p$
sen. $b = m'\ c$
cos. $b = o\ c$
sen. $(a + b) = m'\ p'$
cos. $(a + b) = o\ p'$

Ahora bien; el triángulo $o\ c\ n$ es semejante al $o\ m\ p$, pues la resta $c\ n$ la trazamos paralela á $m\ p$ resultando de esta semejanza las dos proporciones siguientes:

$\dfrac{o\ c}{c\ n} = \dfrac{o\ m}{m\ p}$ $\quad \dfrac{o\ c}{o\ m} = \dfrac{o\ n}{o\ p}$ y si por el punto c trazemos la $c\ n'$ paralela á o X, resulta el triángulo $m'\ n'\ c$, semejante al $m\ o\ p$ pues son equiángulos por tener los lados del uno perpendiculares respectivamente á los del otro; esta nueva semejante da otras dos proporciones, que son:

$$\frac{m' c}{n' c} = \frac{o m}{m p} \qquad \frac{o m}{o p} = \frac{m' c}{m' u'}.$$

Si en las proporciones anteriores sustituimos los valores que da la figura, tendremos:

$$\frac{\cos. b}{c n} = \frac{1}{\text{sen. } a} \qquad \frac{\cos. b}{1} = \frac{o n}{\cos. a} \qquad \frac{\text{sen. } b}{n' c} = \frac{1}{\text{sen. } a} \qquad \frac{1}{\cos. a} = \frac{\text{sen.} b}{m' n'}$$

igualando en todas ellas el producto de extremos con el de medios resulta $c n = \cos. b.$ $\text{sen. } a \quad o n = \cos. a. \ \cos. b. \ n' c = \text{sen. } a. \ \text{sen. } b. \ m' n' = \cos. a \ \text{sen. } b.$

Pero de la figura se deduce, sen. $(a + b) = m' p' = m' n' + n' p' = m' n' + c n$ sustituyendo los valores hallados resulta por último

sen $(a + b) = m' n' + c n = \cos. a \ \text{sen.} b + \cos. b \ \text{sen. } a = \text{sen. } a \cos. b + \text{sen. } b \cos. a$

Del mismo modo $\cos. (a + b) = o p' = o n - p' n = o n - n' c = \cos. a \cos. b - \text{sen.} a \ \text{sen} b$

Estas fórmulas nos dan el seno y el coseno de la suma de dos arcos, cuando se conocen el seno y el coseno de cada uno de ellos.

Para obtener el seno y el coseno de la diferencia, basta hacer en las fórmulas anteriores $b = -b$ y resultan las siguientes:

sen. $(a - b) = \text{sen. } a \cos. b - \text{sen. } b \cos. a$

cos. $(a - b) = \cos. a \cos. b + \text{sen. } a \ \text{sen. } b$

Hemos supuesto que la suma de los arcos es menor que un cuadrante: pero la demostración es tan general que se verifica en todos los casos.

LECCIÓN 5.ª

Valor del seno y coseno del doble y de la mitad de un arco

27. Vamos á determinar primero el valor del seno y coseno del doble de un arco en función del coseno y seno de éste.

En efecto; si en las fórmulas sen. $(a + b) =$ sen. a cos. $b +$ sen. b cos. a y cos. $(a + b) =$ cos. a cos. $b -$ sen. a sen b, cambiamos **b** por **a**, resultan sen. $2\,a =$ $=$ sen. a cos. $a +$ sen. a cos. $a = 2$ sen. a cos. a, cos. $2\,a =$ cos. a cos. $a -$ sen. $a =$ $=$sen $a' =$ cos $^2\,a -$ sen. $^2\,a$.

La 1.ª nos dice *que el seno del doble de un arco, es igual al doble del producto del seno por el coseno del mismo.*

La 2.ª nos dice *que el coseno del doble de un arco, es igual al cuadrado del coseno, menos el cuadrado del seno.*

La fórmula hallada anteriormente para el coseno del doble, viene en función del coseno y seno del arco; y para obtenerla solo en función de uno de estos elementos, sustituyamos en ella en lugar del cos. $^2 a$ y sen. $^2 a$ sus valores, con lo cual aquella se convierte en

$$\cos.\ 2a = \cos.^2 a - \text{sen.}^2 a = \begin{cases} = (1 - \text{sen}^2 a) - \text{sen}^2 a = 1 - 2\,\text{sen}^2 a \\ = \cos.^2 a - (1 - \cos.^2 a) = \cos^2 a - 1 + \cos.^2 a = 2\cos.^2 a - 1 \end{cases}$$

que deben traducirse en lenguaje como las anteriores. Claro es que en la práctica emplearemos siempre la fórmula correspondiente con arreglo á los elementos conocidos.

28. Si quisiéramos obtener el seno y coseno de $3a$, procederíamos del siguiente modo:

Haciendo $b = 2a$ en sen. $(a+b)$ y cos. $(a+b)$, tendremos por las transformaciones sencillas que indica el siguiente cálculo.

$$\left.\begin{array}{r}\text{sen.}\,(a+b) = \text{sen.}\,a\cos.\,b + \text{sen.}\,b\cos.\,a \\ b = 2a\end{array}\right\} \text{sen.}\ 3a = \text{sen.}\,a\cos.\ 2a + \text{sen.}\ 2a\cos.\,a =$$

$$= \text{sen.}\,a\,(1 - 2\,\text{sen.}^2 a) + 2\,\text{sen.}\,a\cos.\,a\cos.\,a = \text{sen.}\,a - 2\,\text{sen.}^3 a + 2\,\text{sen.}\,a\cos.^2 a =$$

$$= \text{sen.}\,a - 2\,\text{sen.}^3 a + 2\,\text{sen.}\,a\,(1 - \text{sen.}^2 a) = \text{sen.}\,a - 2\,\text{sen.}^3 a + 2\,\text{sen}\,a - 2\,\text{sen.}^3 a =$$

$= 3\,\text{sen.}\,a - 4\,\text{sen.}^3 a$. «La que nos dice, que el seno del triplo de un arco, es igual al triplo del seno menos el cuadruplo del cubo del seno del mismo arco.»

Para el cos. $3a$ partiremos de la fórmula cos. $(a+b) = \cos.\,a\cos.\,b -$

$$\left.\begin{array}{r} - \text{sen.}\,a\ \text{sen.}\,b \\ \text{haciendo}\ b = 2a\end{array}\right\} \cos.\ 3a = \cos.\,a\cos.\ 2a - \text{sen.}\,a\,\text{sen.}\ 2a = \cos.\,a\,(2\cos.^2 a - 1) -$$

$-\text{sen.}\, a\,(2\,\text{sen.}\, a\cos. a) = 2\cos.^3 a - \cos. a - 2\,\text{sen.}^2 a\cos. a = 2\cos.^3 a - \cos. a -$
$- 2\cos. a\,(1 - \cos.^2 a) = 2\cos.^3 a - \cos. a - 2\cos. a + 2\cos.^3 a = 4\cos.^3 a - 3\cos. a$
que también puede traducirse en lenguaje.

29. Calculemos ahora el seno y coseno de la mitad de un arco, cuando se conozca el coseno de éste.

Partiendo de las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}^2 a + \cos.^2 a = 1 \\ \cos.^2 a - \text{sen.}^2 a = \cos. 2a\end{array}\right\}\text{ cambiando } \mathbf{a} \text{ en } \frac{a}{2}\text{, resulta}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}^2 \dfrac{a}{2} + \cos.^2 \dfrac{a}{2} = 1 \\[2ex] \cos.^2 \dfrac{a}{2} - \text{sen.}^2 \dfrac{a}{2} = \cos. a\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{combinando por suma y resta se} \\ \text{tienen respectivamente los valores}\end{array}$$

$$\text{siguientes}\left\{\begin{array}{l}2\cos.^2 \dfrac{a}{2} = 1 + \cos. a \\[2ex] 2\,\text{sen.}^2 \dfrac{a}{2} = 1 - \cos. a\end{array}\right\}\text{ de donde }\left\{\begin{array}{l}\cos.^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 + \cos. a}{2} \\[2ex] \text{sen.}^2 \dfrac{a}{2} = \dfrac{1 - \cos. a}{2}\end{array}\right.$$

extrayendo la raíz cuadrada resulta

$$\cos. \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 + \cos. a}}{2} \quad \text{sen.} \frac{a}{2} = \pm \frac{\sqrt{1 - \cos. a}}{2}$$

30. Para hallar estos valores en función del seno, partiremos de las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}^2 a + \cos.^2 a = 1 \\ 2 \text{ sen. } a \cos. a = \text{sen. } 2\, a\end{array}\right\} \text{ cambiando } a \text{ en } \frac{a}{2}\text{, resulta}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen.}^2 \dfrac{a}{2} + \cos.^2 \dfrac{a}{2} = 1 \\ 2 \text{ sen. } \dfrac{a}{2} \cos. \dfrac{a}{2} = \text{sen. } a\end{array}\right\}$$ combinadas estas dos igualdades por suma y resta, y

teniendo en cuenta que la suma de los primeros miembros es el desarrollo del cuadrado de la suma de dos cantidades, y que la combinación por resta nos dá el cuadrado de la diferencia, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l}\left(\text{sen. } \dfrac{a}{2} + \cos. \dfrac{a}{2}\right)^2 = 1 + \text{sen. } a \\ \left(\text{sen. } \dfrac{a}{2} - \cos. \dfrac{a}{2}\right)^2 = 1 - \text{sen. } a\end{array}\right\} \text{ extrayendo la raiz}$$

cuadrada $$\left\{\begin{array}{l}\text{sen. } \dfrac{a}{2} + \cos. \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{1 + \text{sen. } a} \\ \text{sen. } \dfrac{a}{2} - \cos. \dfrac{a}{2} = \pm\sqrt{1 - \text{sen. } a}\end{array}\right\}$$ volviendo á combinar por suma y resta, resultan los valores:

$$\left.\begin{array}{l} 2 \text{ sen. } \dfrac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{sen. } a} \pm \sqrt{1 - \text{sen. } a} \\ 2 \cos. \dfrac{a}{2} = \pm \sqrt{1 + \text{sen. } a} \mp \sqrt{1 - \text{sen. } a} \end{array}\right\} \text{dividiendo por 2, se tiene por último:}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen. } \dfrac{a}{2} = \pm \dfrac{\sqrt{1 + \text{sen. } a}}{2} \pm \dfrac{\sqrt{1 - \text{sen. } a}}{2} \\ \cos. \dfrac{a}{2} = \pm \dfrac{\sqrt{1 + \text{sen. } a}}{2} \mp \dfrac{\sqrt{1 - \text{sen. } a}}{2} \end{array}\right\} \text{que son los valores que pedíamos.}$$

LECCIÓN 6.ª

Determinación de la tangente de la suma de dos arcos; y del doble de un arco

31. Sabemos que tag. $(a+b) = \dfrac{\text{sen. } (a+b)}{\cos. (a+b)} = \dfrac{\text{sen. } a \cos. b + \text{sen. } b \cos. a}{\cos. a \cos. b - \text{sen. } a \text{ sen. } b} =$
$=$ dividiendo todos los términos de este quebrado por cos. a cos. b, con lo cual no se altera, se tiene $=$

$$= \frac{\dfrac{\text{sen. } a \text{ cos. } b}{\text{cos. } a \text{ cos. } b} + \dfrac{\text{sen. } b \text{ cos. } a}{\text{cos. } a \text{ cos. } b}}{\dfrac{\text{cos. } a \text{ cos. } b}{\text{cos. } a \text{ cos. } b} - \dfrac{\text{sen. } a \text{ sen. } b}{\text{cos. } a \text{ cos. } b}} = \frac{\dfrac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} + \dfrac{\text{sen. } b}{\text{cos. } b}}{1 - \dfrac{\text{sen. } a}{\text{cos. } a} \times \dfrac{\text{sen. } b}{\text{cos. } b}} = \frac{\text{tag. } a + \text{tag. } b}{1 - \text{tag. } a \times \text{tag. } b}$$

Lo que nos dice que la tangente de la suma de dos arcos, es igual á la suma de las tangentes de éstos, dividida por el exceso entre la unidad y el producto de las referidas tangentes.

Si en la fórmula hallada, hacemos $b = a$ resulta $\text{tag. } 2\,a = \dfrac{2 \text{ tag. } a}{1 - \text{tag.}^2\, a}$

LECCIÓN 7.ª

—

Preparación de fórmulas para el cálculo logarítmico.

32. Para que una fórmula sea calculable por logaritmos, es necesario que afecte la forma de producto, cociente, potencia ó raiz; puesto que el logaritmo de una suma ó diferencia es desconocido: luego, si conseguimos transformar la suma ó diferencia en

producto ó cociente, habremos resuelto el problema. En efecto; tomemos las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen.}\ (a+b) = \text{sen.}\ a\ \cos.\ b + \text{sen.}\ b\ \cos.\ a \\ \text{sen.}\ (a-b) = \text{sen.}\ a\ \cos.\ b - \text{sen.}\ b\ \cos.\ a \\ \cos.\ (a+b) = \cos.\ a\ \cos.\ b - \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b \\ \cos.\ (a-b) = \cos.\ a\ \cos.\ b + \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b \end{array}\right\}$$

Combinando por suma y resta las dos primeras, y haciendo igual operación con las dos últimas, resultan

$$\left.\begin{array}{l} \text{sen.}\ (a+b) + \text{sen.}\ (a-b) = 2\ \text{sen.}\ a\ \cos.\ b \\ \text{sen.}\ (a+b) - \text{sen.}\ (a-b) = 2\ \text{sen.}\ b\ \cos.\ a \\ \cos.\ (a+b) + \cos.\ (a-b) = 2\ \cos.\ a\ \cos.\ b \\ \cos.\ (a-b) - \cos.\ (a+b) = 2\ \text{sen.}\ a\ \text{sen.}\ b \end{array}\right\}$$

Si para mayor facilidad hacemos $\left\{\begin{array}{l} a+b=p \\ a-b=q \end{array}\right\}$ sumando y restando estas dos igualdades $\left\{\begin{array}{l} 2\,a=p+q \\ 2\,b=p-q \end{array}\right\}$ de donde $\left\{\begin{array}{l} a=\dfrac{1}{2}\,(p+q) \\ b=\dfrac{1}{2}\,(p-q) \end{array}\right\}$ llevando estos valores á las igualdades anteriores se tiene

$$\left.\begin{aligned}
\text{sen. } p + \text{sen. } q &= 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q)\\
\text{sen. } p - \text{sen. } q &= 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p-q) \cos. \frac{1}{2}(p+q)\\
\cos. p + \cos. q &= 2 \cos. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q)\\
\cos. p - \cos. q &= 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p+q) \text{ sen. } \frac{1}{2}(p-q)
\end{aligned}\right\}$$ Traducidas nos dicen:

1.ª *La suma de los senos de dos arcos, es igual al doble del seno de la semisuma por el coseno de la semidiferencia.*

2.ª *La diferencia de los senos de dos arcos, es igual al doble del seno de la semidiferencia, por el coseno de la semisuma.*

3.ª *La suma de los cosenos de dos arcos, es igual al doble del coseno de la semisuma, por el coseno de la semidiferencia;* y

4.ª *La diferencia de los cosenos de dos arcos, es igual al doble del seno de la semi suma, por el seno de la semidiferencia.*

Vemos, pues, que estas reglas nos sirven para transformar las sumas ó diferencias, en producto y por lo tanto calculables por logaritmos.

33. Dividiendo la 1.ª por la 2.ª, se tiene

$$\frac{\text{sen. } p + \text{sen. } q}{\text{sen. } p - \text{sen. } q} = \frac{2 \text{ sen. } {}^1\!/_2\,(p+q) \text{ cos. } {}^1\!/_2\,(p-q)}{2 \text{ sen. } {}^1\!/_2\,(p-q) \text{ cos. } {}^1\!/_2\,(p+q)} =$$

$$= \frac{\text{sen. } {}^1\!/_2\,(p+q)}{\text{cos. } {}^1\!/_2\,(p+q)} \times \frac{\text{cos. } {}^1\!/_2\,(p-q)}{\text{sen. } {}^1\!/_2\,(p-q)} = \text{tag. } {}^1\!/_2\,(p+q) \cdot \text{cot. } {}^1\!/_2\,(p-q) =$$

$$= \text{tag. } {}^1\!/_2\,(p+q) \cdot \frac{1}{\text{tag. } {}^1\!/_2\,(p-q)} = \frac{\text{tag. } {}^1\!/_2\,(p+q)}{\text{tag. } {}^1\!/_2\,(p-q)}$$ *Lo que nos dice, que la suma de los senos de dos arcos, es á su diferencia, como la tangente de la semisuma es á la tangente de la semidiferencia de los mismos.*

Dividiendo la 1.ª por la 3.ª resulta

$$\frac{\text{sen. } p + \text{sen. } q}{\text{cos. } p + \text{cos. } q} = \frac{2 \text{ sen. } {}^1\!/_2\,(p+q) \text{ cos. } {}^1\!/_2\,(p-q)}{2 \text{ cos. } {}^1\!/_2\,(p+q) \text{ cos. } {}^1\!/_2\,(p-q)} = \frac{\text{sen. } {}^1\!/_2\,(p+q)}{\text{cos. } {}^1\!/_2\,(p+q)} = \text{tag. } {}^1\!/_2\,(p+q)$$

Lo que nos dice, que la suma de los senos de dos arcos dividida por la de cosenos, es igual á la tangente de la semisuma de los mismos.

Dividiendo la 1.ª por la 4.ª se tiene

$$\frac{\text{sen. } p + \text{sen. } q}{\text{cos. } p - \text{cos. } q} = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p+q) \text{ cos. } \frac{1}{2}(p-q)}{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p+q) \text{ sen. } \frac{1}{2}(p-q)} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(p-q)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(p-q)} =$$

$= \text{cot.} \frac{1}{2}(p - q)$. *Lo que nos dice, que la suma de los senos de dos arcos, dividida por la diferencia de cosenos, es igual á la cotangente de la sem. 'iferencia.*

Dividiendo la 2.ª por la 3.ª se tiene

$$\frac{\text{sen. } p - \text{sen. } q}{\text{cos. } p + \text{cos. } q} = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p - q) \text{ cos. } \frac{1}{2}(p + q)}{2 \text{ cos. } \frac{1}{2}(p + q) \text{ cos. } \frac{1}{2}(p - q)} = \text{tag. } \frac{1}{2}(p - q).$$

Lo que nos dice, que la diferencia de los senos dividida por la suma de cosenos, es igual á la tangente de la semidiferencia.

Dividiendo la 2.ª por la 4.ª se tiene

$$\frac{\text{sen. } p - \text{sen. } q}{\text{cos. } p - \text{cos. } q} = \frac{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p - q) \text{ cos. } \frac{1}{2}(p + q)}{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p + q) \text{ sen. } \frac{1}{2}(p - q)} = \frac{\text{cos. } \frac{1}{2}(p + q)}{\text{sen. } \frac{1}{2}(p + q)} =$$

$= \text{cot. } \frac{1}{2}(p + q)$. *Lo que nos dice que la diferencia de los senos, dividida por la de cosenos, es igual á la cotangente de la semisuma.*

Dividiendo la 3.ª por la 4.ª se tiene

$$\frac{\cos. p + \cos. q}{\cos. p - \cos. q} = \frac{2 \cos. \frac{1}{2}(p+q) \cos. \frac{1}{2}(p-q)}{2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p+q) \text{ sen. } \frac{1}{2}(p-q)} =$$

$= \cot. \frac{1}{2}(p+q) \times \cot. \frac{1}{2}(p-q)$. *Lo que nos dice, que la suma de los cosenos, dividida por la diferencia, es igual á la cotangente de la semisuma, por la cotangente de la semidiferencia.*

Todos los resultados obtenidos vemos que son calculables por logaritmos.

SECCIÓN 8.ª

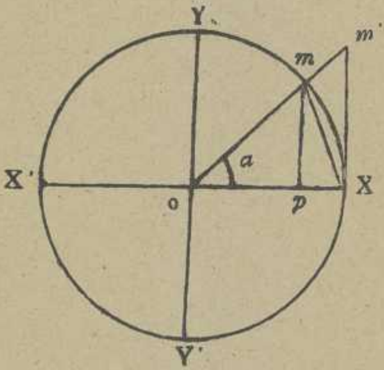
Tablas de logaritmos.—Teoremas

34. Con objeto de aplicar á la resolución de triángulos, las teorías que estudia la Trigonometría, ha sido preciso construir tablas logaritmo-trigonométricas, donde se encuentran sustituidas las funciones circulares por magnitudes rectilíneas, llamadas

logaritmos de las líneas trigonométricas correspondientes; cuyo uso y determinación, estudiaremos más adelante, concretándonos ahora á estudiar las bases principales sobre que está fundada la construcción de las referidas tablas.

1.º *Todo arco positivo y menor que un cuadrante, es mayor que su seno y menor que su tangente.*

En efecto; consideremos (figura 10) el arco X*m;* trazando el seno y la tangente á la vez que la cuerda, se verifica, en el triángulo rectángulo $m\,p$ X, $m\,p < m$ X $<$ arco. m X ó bien sen. $a <$ arco. a que evidencia la primera parte de la proposición.



(Figura 10)

Ahora bien, el área del sector circular X $m\,o$ X, es menor evidentemente que la del triángulo X $o\,m'$ y como el área del primero es la mitad del arco por el radio ó recíprocamente, y la del segundo es la mitad de su base por la altura, podremos escribir llamando R al radio o X, $\frac{1}{2}$ R. m X $< \frac{1}{2}$ R. m'X y suprimiendo el factor común resultará m X $< m'$ X, ó bien arco. $a <$ tag. a que es lo que tratábamos de demostrar.

2.º Hemos demostrado que sen. $a <$ arco. $a <$ tag. a dividiendo por sen. a, resultará $1 < \frac{\text{arco. } a}{\text{sen. } a} < \frac{1}{\text{cos. } a}$ esta desigualdad nos manifiesta que la relación entre el arco y su seno está comprendida entre la unidad y $\frac{1}{\text{cos. } a}$ por lo tanto, siendo $\frac{\text{arco. } a}{\text{sen. } a} > 1$ si en esta fracción el numerador disminuye, tenderá hacia la unidad, y á medida que esto se verifica se aproximará más al denominador, es decir, que cuanto más pequeño sea el arco, tanto más se aproximará al valor del seno, y por consiguiente, cuando el arco sea muy pequeño, no habrá inconveniente en tomar por valor del arco el de su seno, y recíprocamente, pues podremos despreciar sin gran error, la diferencia entre el 1.º y el 2.º

3.º Trataremos ahora de investigar la diferencia entre el arco y su seno.

Hemos demostrado que tag. $a >$ arco a y dividiendo por 2 tag. $\frac{a}{2} > \frac{\text{arco. } a}{2}$ ó bien $\frac{\text{sen. } \frac{a}{2}}{\text{cos. } \frac{a}{2}} > \frac{\text{arco. } a}{2}$ multiplicando por cos. $\frac{a}{2}$ se tiene sen. $\frac{a}{2} > \frac{\text{arco.} a}{2}$ cos. $\frac{a}{2}$ y multiplicando por 2 cos. $\frac{a}{2}$ resulta 2 sen. $\frac{a}{2}$ cos. $\frac{a}{2} > 2\, \frac{\text{arco. } a}{2}$ cos.^{2} $\frac{a}{2}$ pero el primer miembro de esta desigualdad es el valor de sen. a deducido de la fórmula sen. $2a = 2$ sen. a cos. a después de hacer $a = \frac{a}{2}$ luego sustituyendo este valor en el primer miembro y efectuando la reducción en el segundo resulta

sen. $a >$ arco a cos.$^2 \frac{a}{2} =$ arco $a \left(1 - \text{sen.}^2 \frac{a}{2}\right) =$ arco a — arco a sen.$^2 \frac{a}{2}$ y si en este último miembro, sustituimos el seno por el arco aumentará el sustraendo y disminuirá por lo tanto el resto, luego con mucha más razón se verificará la desigualdad

sen. $a >$ arco $a - \frac{(\text{arco } a)^3}{4}$ ó bien $\frac{(\text{arco } a)^3}{4} >$ arco a — sen. a y por lo tanto

arco a — sen. $a < \frac{(\text{arco } a)^3}{4}$ *Lo que nos dice, que la diferencia entre el arco y su seno, es menor que la cuarta parte del cubo del arco.*

El arco menor de las tablas es el de 1' (refiriéndonos á las de Vázquez Queipo), y si quisiéramos calcular su seno aproximadamente, procederíamos en la siguiente forma, según lo demostrado anteriormente.

Como el arco de 1' está comprendido en el de $\pi = 180°$ 10.800 veces, su valor será $1' = \frac{\pi}{10.800} = \frac{3{,}1415926.......}{10.800} = 0{,}000290888208.......$ luego el error que se cometerá tomando esta cantidad por sen. 1' será menor que $\frac{(\text{arco } 1')^3}{4} = \frac{(0{,}000\ 3)^3}{4} \doteq$

$= 0{,}000000000007$, luego podremos tomar las doce primeras cifras y se tendrá sen $1' = 0{,}000290888208$.

El coseno de $1'$ lo calcularemos por la fórmula cos $1' = \sqrt{1 - \text{sen.}^2 1'}$ que después de sustituir y hacer operaciones se tiene cos. $1' = 0{,}9999999576$ y por medio de las fórmulas

$$\text{sen. } 2\,a = 2 \text{ sen. } a \text{ cos. } a \qquad \text{sen. } 3\,a = 3 \text{ sen. } a - 4 \text{ sen.}^3\, a$$
$$\text{cos. } 2\,a = \text{cos.}^2 a - \text{sen.}^2 a \qquad \text{cos. } 3\,a = 4 \text{ cos.}^3 a - 3 \text{ cos. } a$$

calcularíamos los senos y cosenos correspondientes á $2'$ y $3'$ haciendo en ellas $a = 2'$ $a = 3''$ y así sucesivamente de $1'$ en $1'$ los calcularíamos todos hasta 45^o. La tangente de $1'$ la calcularíamos por la fórmula tag. $1' = \dfrac{\text{sen. } 1'}{\text{cos. } 1'}$ y la tag. $2' = \dfrac{2 \text{ tag. } 1'}{1 - \text{tag.}^2 1'}$ etc., lo mismo para calcular las cotangentes.

36. El procedimiento seguido para calcular los senos y cosenos, es muy penoso ó al menos poco expedito, por la serie de operaciones que es necesario efectuar, operaciones siempre complicadas, y vamos á servirnos de otro procedimiento.

Consideremos las fórmulas

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. }(a+b) + \text{sen. }(a-b) = 2 \text{ sen. } a \text{ cos. } b \\ \text{cos. }(a+b) + \text{cos. }(a-b) = 2 \text{ cos. } a \text{ cos. } b\end{array}\right\}$$

como estas expresiones son identidades, quedarán siempre satisfechas, cualquiera que sea el valor que se les dé á las letras, de modo que podremos hacer

$a = h\,b$ y sustituyendo se tiene $\begin{cases} \text{sen.}\,(h\,b + b) + \text{sen.}\,(h\,b - b) = 2\ \text{sen.}\ h\,b\ \cos.\ b \\ \cos.\,(h\,b + b) + \cos.\,(h\,b - b) = 2\ \cos.\ h\,b\ \cos.\ b \end{cases}$

ó bien $\begin{cases} \text{sen.}\,(h + 1)\,b + \text{sen.}\,(h - 1)\,b = 2\ \text{sen.}\ h\,b\ \cos.\ b \\ \cos.\,(h + 1)\,b + \cos.\,(h - 1)\,b = 2\ \cos.\ h\,b\ \cos.\ b \end{cases}$

sacando los valores de sen. $(h + 1)\,b$ y cos. $(h + 1)\,b$

se tiene $\begin{cases} \text{sen.}\,(h + 1)\,b = 2\ \text{sen.}\ h\,b\ \cos.\ b - \text{sen.}\,(h - 1)\,b \\ \cos.\,(h + 1)\,b = 2\ \cos.\ h\,b\ \cos.\ b - \cos.\,(h - 1)\,b \end{cases}$

y si en estas fórmulas damos á b valores de 1' en 1' y á m los correspondientes comprendidos en el número de minutos que tienen 45°, hallaremos los senos y cosenos de todos los ángulos desde 0° á 45°.

Así:

$$\begin{array}{l} \text{sen.}\ 2' = 2\ \text{sen.}\ 1'\ \cos'\ 1' \\ \text{sen.}\ 3' = 2\ \text{sen.}\ 2'\ \cos.\ 1' - \text{sen.}\ 1' \\ \text{sen.}\ 4' = 2\ \text{sen.}\ 3'\ \cos.\ 1' - \text{sen.}\ 2' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \cos.\ 2' = 2\ \cos.^2\ 1' - 1 \\ \cos.\ 3' = 2\ \cos.\ 2'\ \cos.\ 1' - \cos.\ 1' \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

obtenidos los senos y cosenos de 0° á 45° están calculados también los comprendidos entre 45° y 90° pues para hallar los cosenos de éstos bastará tomar los complementos de los senos, y recíprocamente, por lo demostrado en el número 20.

El segundo procedimiento para obtener los senos y cosenos, se atribuye al sabio matemático *Simpsón.*

LECCIÓN 9.ª

—

Disposición y uso de las tablas de logaritmos

37. Una tabla de logaritmos trigonométrica, es una sucesión de cuadros donde se encuentran los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de los ángulos desde cero ó un minuto hasta 90°, creciendo de 1' en 1' ó de 10'' en 10'', pudiendo, sin embargo, hallar en estas tablas, los logaritmos correspondientes á ángulos mayores que este límite, pues las líneas trigonométricas de un ángulo, por grande que éste sea, pueden reducirse á otras comprendidas en el 1.er cuadrante.

38. Las tablas á que hemos de referirnos, son las de Vázquez Queipo, en la que difieren los ángulos de 1' en 1' y como en ellas se supone el radio igual á la unidad, los logaritmos, de los senos y cosenos serán negativos, pues, según se demuestra en Algebra, *los únicos logaritmos negativos, son los procedentes de números menores que la unidad;* idéntica propiedad se observa con las tangentes de los arcos menores que 45° y con las cotangentes de los mayores que este límite y menores que 90°.

En la parte superior de cada plana lo mismo que en la inferior, llevan escrito el valor gradual del ángulo cuyo logaritmo se quiere obtener; á la derecha de cada columna cuya inicial es *seno* ó *coseno*, hay otra con la inicial 1'' donde están las diferencias tabulares, ó comunes á cada cinco logaritmos, y entre las columnas de tangentes y cotangentes está la de diferencias tabulares de estas líneas, no habiendo más que una columna de diferencias comunes para estas líneas porque las diferencias de los logaritmos de dos tangentes, es igual á la de los logaritmos de las cotangentes de los mismos ángulos: En efecto: sabemos que

$\left.\begin{array}{l}\text{tag. } a \times \text{cot. } a = 1 \\ \text{tag. } b \times \text{cot. } b = 1\end{array}\right\}$ de donde tag. $a \times$ cot. $a =$ tag. $b \times$ cot. b tomando logaritmos resulta log. tag. $a +$ log. cot. $a =$ log. tag. $b +$ log. cot. b pasando al primer miembro log. tag. b, y al segundo log. cot. a se tiene

log. tag. $a -$ log. tag. $b =$ log. cot. $b -$ log cot. a, que es lo que se quería demostrar.

39. *Uso de las tablas.*—Dos son los problemas que resuelven:

1.º Dado el número de grados, minutos y segundos, determinar el logaritmo; y 2.º Dado el logaritmo, hallar el ángulo correspondiente ó antilogaritmo.

Problema directo.—En este caso, pueden ocurrir otros dos; según que el ángulo dado tenga su logaritmo exactamente contenido en las tablas, ó que no lo esté.

Se reconoce que un ángulo tiene su logaritmo exactamente en las tablas, cuando no contiene segundos.

Supongamos que se trata de hallar el log. sen. 25º y 18'.

En este caso bastará buscar la plana cuya graduación superior es 25º y bajando por la primera columna de la izquierda hasta encontrar 18' y corriendo la vista á la derecha en la columna seno y á la misma altura de 18' se encontrará para log. sen. $25^{\circ}18' = \bar{1},630792$.

Lo mismo procederíamos si fuera el logaritmo coseno, tangente ó cotangente.

Si el logaritmo que se quiere obtener corresponde á un ángulo mayor de 45° entraríamos en la tabla por la parte inferior y por la columna 1' de la derecha tomaríamos el complemento, es decir si se busca el seno, se tomaría el coseno y recíprocamente. Lo mismo para las tangentes y las cotangentes.

Si el ángulo contiene segundos y decenas de segundos tal como log. sen. $(35^{\circ}42'16''2)$ se buscará el logaritmo correspondiente á los grados y minutos, que según la regla anterior es $\bar{1},766072$, redúzcanse los segundos y decenas de segundo á fracción decimal que es 16,2 multiplíquese este número por 2,93 diferencia tabular y agregando el producto al logaritmo hallado se tendría por último log. sen. $(35^{\circ}42'16''2) = \bar{1},766119$. Observemos, que el incremento que ha sufrido el log. sen. $(35^{\circ}42')$ es el correspondiente á 16" y 2 décimas de segundo.

Lo mismo procederíamos si tuviéramos que hallar log. tag. solo hay que tener en cuenta, que cuando se pide el log. cos. ó el log. cot., en vez de aumentar el logaritmo próximo menor en el producto de la diferencia tubular por los segundos, hay que restar este producto, pues los cosenos y cotangentes, van disminuyendo, á medida que el ángulo es mayor.

Para hallar los productos con más rapidez, puede hacerse uso de las tablillas de partes proporcionales, colocadas al margen de las planas, cuyo uso se funda en la regla que establece el Sr. Vázquez Queipo en el número 63 de la página 42.

Si el ángulo es menor que 4° ó mayor que 86° para hallar el logaritmo, se empleará el procedimiento que explica el mismo autor en la página 44 de las tablas.

40. *Problema inverso.*—Pueden ocurrir á su vez otros dos casos; que el logaritmo dado tenga el ángulo correspondiente exactamente contenido en las tablas, ó que no lo esté.

En el primer caso se correrá la vista por la columna correspondiente hasta encontrar el logaritmo dado, tomando para valor del ángulo los minutos de la izquierda y los grados de la parte superior, si se entra en la tabla por esta parte, y en caso contrario los minutos de la derecha y los grados de la parte inferior.

Debe tenerse en cuenta, que los logaritmos de los senos y tangentes van aumentando, y los cosenos y cotangentes, disminuyendo.

Cuando el logaritmo dado no tiene el ángulo exactamente en las tablas, se hallará el que más se le aproxime por defecto, y se tomarán los grados y minutos de éste; se resta el logaritmo próximo menor del dado y la diferencia se divide por la diferencia tabular, resultando en el cociente los segundos y décimas de segundo correspondientes al ángulo total que se busca. Si el logaritmo dado, corresponde á un ángulo menor que 4° ó mayor que 86° se procederá como manifiesta el autor de la tabla.

Nada mejor que poner muchos ejemplos hasta adquirir la necesaria práctica.

LECCIÓN 10

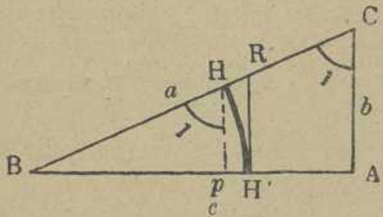
Relaciones entre los elementos de un triángulo rectángulo

41. En todo triángulo rectángulo se verifica.

1.º Un cateto es igual á la hipotenusa por el seno del ángulo opuesto.

2.º Un cateto es igual á la hipotenusa por el coseno del ángulo adyacente y

3.º Un cateto, es igual al otro cateto por la tangente del ángulo opuesto al primero ó por la cotangente del adyacente.



(Figura 11)

En efecto; sea el triángulo rectángulo A B C (figura 11).

Si con el centro en B y un radio igual á la unidad, describimos un arco H H'; trazando el seno H p de este arco se forma el triángulo H B p semejante al A B C, por ser los lados H p y C A perpendiculares á la recta A B, luego áng.º 1 = áng.º 1' que nos da la proporción $\frac{BH}{Hp} = \frac{BC}{CA}$ ó bien $\frac{1}{\text{sen. B}} = \frac{a}{b}$ de donde $b = a$ sen. B que nos demuestra la primera proposición.

La semejanza de los mismos triángulos nos da la proporción siguiente $\frac{BH}{BP} = \frac{BC}{BA}$ ó bien $\frac{1}{\cos. B} = \frac{a}{c}$, de donde $c = a \cos. B$, que demuestra la 2.ª propiedad; lo que no podía menos de suceder, pues teniendo en cuenta que en un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, si en la fórmula anterior $b = a$ sen B sustituimos el sen. B por el cos. C, resulta $b = a \cos. C$.

Si trazamos la tangente del arco H H', se forma el triángulo R B H', semejante al A B C por ser el lado R H' paralelo al A C, cuya semejanza nos da la proporción $\frac{RH'}{BH'} = \frac{CA}{BA}$ ó bien $\frac{\text{tag. } B}{1} = \frac{b}{c}$, de donde $b = c$ tag. B, que nos demuestra la tercera propiedad. Este resultado pudiéramos obtenerlo en otra forma. En efecto, hemos demostrado $\left\{\begin{array}{l} b = a \text{ sen. } B \\ c = a \cos. B \end{array}\right\}$ dividiendo miembro á miembro se tiene $\frac{b}{c} = \frac{\text{sen. } B}{\cos. B} =$ $=$ tag. B, de donde $b = c$ tag. B, que es lo que tratábamos de demostrar.

Teniendo en cuenta, que la tangente de un ángulo es igual á la cotangente del complementario, y que en un triángulo rectángulo los ángulos agudos son complementarios, se tiene tag. B $=$ cot. C sustituyendo en la fórmula anterior resulta $b =$ $= c$ cot. C, que nos demuestra la última parte de estas propiedades.

42. Fundándose en lo demostrado anteriormente podemos evidenciar el teorema de Pitágoras.

En efecto: $\left\{\begin{array}{l} b = a \text{ sen. B} \\ c = a \text{ cos. B} \end{array}\right\} \left\{\begin{array}{l} b^2 = a^2 \text{ sen.}^2 \text{ B} \\ c^2 = a^2 \text{ cos.}^2 \text{ B} \end{array}\right\}$ sumando miembro á miembro, y sacando factor común en el 2.º a^2 se tiene $b^2 + c^2 = a^2 (\text{sen.}^2 \text{ B} + \text{cos.}^2 \text{ B}) = a^2$ es decir *que el cuadrado del número que mide la hipotenusa, es igual á la suma de los cuadrados que expresan las longitudes de los catetos.*

43. Sabemos que $a^2 = b^2 + c^2$ de donde

$$b^2 = a^2 - c^2. \quad c^2 = a^2 - b^2. \text{ ó bien } \left\{\begin{array}{l} a = \sqrt{b^2 + c^2} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2} \end{array}\right.$$

que pueden traducirse también en reglas prácticas. En las aplicaciones rara vez se emplean las últimas fórmulas por no ser calculables por logaritmos y para aplicarlos sería necesario prepararlas antes; por estas razones, las fórmulas que más se emplean son las del número 41.

44. Para la determinación de los ángulos observaremos, que tratándose de triángulos rectángulos, el ángulo en A siempre es conocido; y los B y C tienen por valores respectivos B = 90° — C y C = 90° — B.

45. Reasumiendo esta lección estableceremos las siguientes fórmulas que dan los los elementos de un triángulo rectángulo.

$$\left.\begin{array}{l} b = a.\ \text{sen. B.} \\ b = a.\ \text{cos. C.} \\ b = c.\ \text{tag. B.} \\ b = c.\ \text{cot. C.} \\ b = \sqrt{a^2 - c^2}. \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} c = a.\ \text{sen. C.} \\ c = a.\ \text{cos. B.} \\ c = b.\ \text{tag. C.} \\ c = b.\ \text{cot. B.} \\ c = \sqrt{a^2 - b^2}. \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{A} = 90^\circ \\ \text{B} = 90^\circ - \text{C.} \\ \text{C} = 90^\circ - \text{B.} \end{array}$$

LECCIÓN 11

Casos de resolución de triángulos rectángulos

46. Las combinaciones de los elementos de un triángulo rectángulo, dan los siguientes casos de resolución:

1.º Dada la hipotenusa a y un ángulo agudo B. Las incógnitas en este caso serían.

el ángulo C, y los catetos b y c. Para hacerlas explícitas, empezaremos por hallar el valor del ángulo C por la fórmula $C = 90° - B$.

El cateto b quedará determinado por la fórmula $b = a$ sen. B en la cual tomando logaritmos se tiene, log. b = log. a + log. sen. B, y una vez verificadas las operaciones que se indican en el segundo miembro y hallado el antilogaritmo del resultado en la tabla de los números tendremos el valor de b.

El cateto c en función de los elementos conocidos lo hallaremos por la fórmula $c = a$ cos. B, ó una vez hallado el valor de C, pudiéramos emplear la $c = a$ sen. C, tomando logaritmos en la anterior se tiene log. c = log. a + log. cos. B, y como antes, efectuando las operaciones indicadas y hallado el antilogaritmo se tiene el valor de c.

47. *2.º caso.*—Dada la hipotenusa a y un cateto b. En este caso las incógnitas serán los ángulos agudos B y C, y el otro cateto c.

Para hallar B, partiremos de la fórmula $b = a$ sen. B, de donde sen. B $= \frac{b}{a}$ tomando logaritmo log. sen. B = log. b — log. a, efectuada esta operación y hallado el antilogaritmo en las tablas trigonométricas, tendremos el valor de B.

Para hallar C en función de los datos, tendremos $b = a$ cos. C, de donde cos. C = $= \frac{b}{a}$ tomando logaritmos log. cos. C = log. b — log. a.

Puesto que ya hemos calculado el valor de B hallaríamos más rápidamente el valor de C por la fúrmula $C = 90^o - B$.

El cateto c, pudieramos hallarlo por la fórmula $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, pero teniendo en cuenta la observación del núm. 43, no conviene emplearla, y puesto que ya conocemos B ó C podremos emplear la $c = a$ sen. C ó $c = a$ cos. B, y más conveniente aún $c = b$ tag. C en la que tomando logaritmos se tiene log. $c =$ log. $b +$ log. tag. C.

48. *3.er Caso.*—Dados el cateto b, y el ángulo agudo B. Las incógnitas serán la hipotenusa a, el cateto c y el ángulo en C.

El ángulo en C se determinará por la fórmula $C = 90^o - B$.

La hipotenusa se hallará partiendo de la fórmula $b = a$ sen. B de donde $a = \dfrac{b}{\text{sen. B}}$ tomando logaritmos se tiene log. $a =$ log. $b -$ log. sen. B efectuada la operación y hallado el antilogaritmo se halla el valor de a.

El cateto c se determinará por la fórmula $c = a$ cos. B. Log. $c =$ log. $a +$ log. cos. B.

49. *4.º Caso.*—Dados los dos catetos b y c.

Las incógnitas serán B C y a.

El ángulo B, se hallará por la fórmúla $b = c$ tag. B de donde tag. $B = \dfrac{b}{c}$ tomando logaritmos log. tag. $B =$ log. $b -$ log. c.

El otro ángulo podríamos hallarlo en función de los datos conocidos partiendo de la fómula $c = b$ tag. C de donde tag. $C = \frac{c}{b}$, pero toda vez que ya conocemos B, se hallará C por la $C = 90^o - C$.

Para hallar la hipotenusa en función de los datos, podremos establecer $a = \sqrt{b^2 + c^2}$, pero será más conveniente emplear la $b = a$ sen. B, de donde $a = \frac{b}{\text{sen. B}}$, log. $a =$ log. b — log. sen. B.

Claro és que en la práctica bastará sustituir en las fórmulas respectivas los valores numéricos.

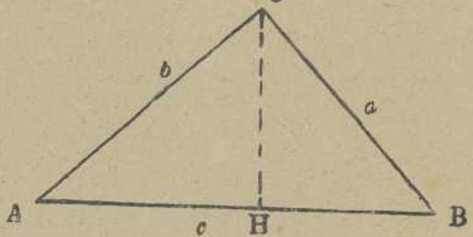
LECCIÓN 12

—

Relación entre los elementos de un triángulo oblicuángulo

50. **Teorema.**—*En todo triángulo, se verifica que los lados son proporcionales á los senos de los ángulos opuestos.*

Supongamos un triángulo A B C, (figura 12) y trazando la altura, queda el triángulo dividido en dos parciales B C H y A C H rectángulos en H, en los cuales según lo demostrado se verifica $\left\{\begin{array}{l} CH = a \text{ sen. } B \\ CH = b \text{ sen. } A \end{array}\right\}$ de donde a sen. B $= b$ sen. A y como si el producto de dos números es igual al de otros dos, con estos cuatro números se puede formar proporción, tendremos $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}}$ según se quería demostrar. Lo mismo procederíamos para otra combinación cualquiera



(Figura 12)

Teorema 2.º—*En todo triángulo se verifica, que la suma de dos de sus lados, es á su diferencia, como la tangente de la semisuma de los ángulos opuestos á estos lados, es á la tangente de la semidiferencia de los mismos.*

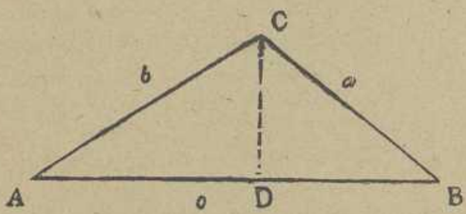
En efecto. Hemos demostrado $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}}$ pero en toda proporción, la suma de antecedente y consecuente de la 1.ª razón, es á su diferencia, como suma de antecedente y consecuente de la 2.ª es á su diferencia; luego podremos escribir

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{sen. A}+\text{sen. B}}{\text{sen. A}-\text{sen. B}}=\frac{\text{tag.}\,\frac{1}{2}\,(\text{A}+\text{B})}{\text{tag.}\,\frac{1}{2}\,(\text{A}-\text{B})}$$ según se quería demostrar.

Teorema 3.º—En todo triángulo se verifica, que el cuadrado de un lado, es igual, á la suma de los cuadrados de los otros dos, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo opuesto al lado que se considera.

En efecto; pueden ocurrir dos casos; que el triángulo sea oblicuángulo ó que sea obtusángulo.

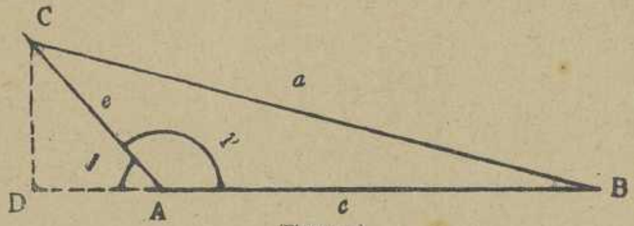
Para el primer caso, supongamos un triángulo oblicuángulo (fig. 13) A B C y propongámonos calcular el cuadrado del lado **a**.



(Figura 13)

Como en este caso el referido lado se opone al ángulo agudo A, y sabemos por Geometría que el cuadrado del lado opuesto á un ángulo agudo es igual á la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble de uno de ellos por la proyección del otro sobre el primero, podremos escribir $a^2 = b^2 + c^2 - 2\,c\,\text{A D}$, pero teniendo en cuenta que A D $= b$ cos. A, sustituyendo resulta $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ cos. A que es lo que se quería demostrar.

Lo mismo lo demostraríamos si el triángulo fuera obtusángulo. En efecto: sea (fig. 14) el A B C.



(Figura 14)

En este caso, el lado **a**, se opone al ángulo obtuso A, luego por Geometria tendremos: $a^2 = b^2 + c^2 + 2c$ A D, y como A D $= b.$ cos. $1 = -b.$ cos. $1' = -b.$ cos. A (pues el ángulo 1 y el 1' son suplementarios) luego sustituyendo se tendrá como antes $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc$ cos. A.

Cualquiera otro lado que hubieramos elcgido nos daría idéntico resultado; luego éste teorema dá las tres ecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2\,b\,c\,cos.\,A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2\,a\,c\,cos.\,B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2\,a\,b\,cos.\,C \end{aligned}\right\}$$

Estas tres fórmulas llamadas fundamentales, nos resuelven el problema de la Trigonometría.

LECCIÓN 13

Resolución de triángulos oblicuángulos

51. Estudiaremos los casos de más frecuente aplicación.

1.er **caso.**—Dados un lado b y los ángulos adyacentes B y C, resolver el triángulo.

Las incógnitas serán el ángulo A y los lados a y c.

El ángulo A, se hallará por la fórmula $A + B + C = 180^o$ de donde $A = 180^o - (B + C)$. Luego restando de 180° la suma de los ángulos conocidos, se tiene el valor de A.

El lado a, se determina partiendo de la proporción $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}}$ de donde $a = \frac{b \text{ sen. A}}{\text{sen. B}}$ tomando logaritmos se tiene $\log. a = (\log. b + \log. \text{sen. A}) - \log. \text{sen. B}$. efectuadas estas operaciones y hallado el antilogaritmo, se tiene el valor de **a**.

El valor de c, lo hallaremos por la fórmula $\frac{b}{c} = \frac{\text{sen. B}}{\text{sen. C}}$ $c = \frac{b \text{ sen. C}}{\text{sen. B.}}$ $\log. c = (\log. b + \log. \text{sen. C}) - \log. \text{sen. B}$.

52.—**2.° Caso.**—Dados dos lados **b** y **c** y el ángulo comprendido A.

Las incógnitas serán los otros dos ángulos B y C, y el lado **a**.

Empezaremos por calcular la semisuma de los ángulos **B** y **C**, para lo cual partiremos de la fórmula $A + B + C = 180^o$ de donde $B + C = 180^o - A$ y dividiendo por 2, tenemos $\frac{B + C}{2} = 90^o - \frac{A}{2}$, luego restando de 90^o, la mitad del valor dado para A, se tiene la semisuma de los otros dos ángulos; como no podía menos de suceder.

Determinemos ahora la semidiferencia de B y C, en la siguiente forma:

Hemos demostrado $\frac{b + c}{b - c} = \frac{\text{tag.}\ \frac{1}{2}(B + C)}{\text{tag.}\ \frac{1}{2}(B - C)}$ de donde $\text{tag.}\ \frac{1}{2}(B - C =$ $= \frac{(b - c)\ \text{tag.}\ \frac{1}{2}(B + C)}{(b + c)}$ tomando logaritmos resulta $\log.\ \text{tag.}\ \frac{1}{2}(B - C) =$ $= \{\log.(b - c) + \log.\ \text{tag.}\ \frac{1}{2}(B + C)\} - \log.(b + c)$; haciendo las operaciones indicadas, y determinado el antilogaritmo se tiene el valor de $\frac{B - C}{2}$.

Conocidas ya la semisuma y la semidiferencia, se hallarán cada uno de los ángulos aplicando el principio de que la semisuma aumentada en la semidiferencia es igual á la mayor; y que la semisuma disminuida en la semidiferencia es igual á la menor de las cantidades; pues $\frac{B + C}{2} + \frac{B - C}{2} = \frac{B + C + B - C}{2} = \frac{2B}{2} = B$ y $\frac{B + C}{2} -$ $- \frac{B - C}{2} = \frac{B + C - B + C}{2} = \frac{2C}{2} = C$.

El lado **a** se hallará por la fórmula $\frac{a}{b} = \frac{\text{sen. A}}{\text{sen. B}}$, de donde $a = \frac{b \text{ sen. A}}{\text{sen. B}}$ tomando logaritmos resulta log. $a = (\text{log. } b. + \text{log. sen. A}) - \text{log. sen. B}$.

53. **3.^{er} caso.**—Dados los tres lados a, b, c, hallar los ángulos.

Si en las fórmulas fundamentales

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos. \text{A} \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2\, a\, c \cos. \text{B} \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2\, a\, b \cos. \text{C} \end{array}\right\} \text{ ó bien } \left\{\begin{array}{l} 2\, b\, c \cos. \text{A} = b^2 + c^2 - a^2 \\ 2\, a\, c \cos. \text{B} = a^2 + c^2 - b^2 \\ 2\, a\, b \cos. \text{C} = a^2 + b^2 - c^2 \end{array}\right\} \text{ despejando}$$

los cosenos se tiene $\cos. \text{A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\, b\, c}$ $\cos. \text{B} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2\, a\, c}$ $\cos. \text{C} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2\, a\, b}$ fórmulas que pueden traducirse en regla práctica.

El inconveniente que presentan estas fórmulas de no ser calculables por logaritmos, hace que tengamos que valernos de otras más expeditas.

En efecto; sabemos que $\cos. \frac{\text{A}}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos. \text{A}}{2}}$ ó bien $\cos.^2 \frac{\text{A}}{2} = \frac{1 + \cos. \text{A}}{2}$ multiplicando por 2, se tiene $2 \cos.^2 \frac{\text{A}}{2} = 1 + \cos. \text{A}$, y sustituyendo el valor de cos. A, deducido de la primera de las fundamentales resulta

$$2 \cos.^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos. A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{2\,b\,e + b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{2\,b\,c} =$$

$$= \frac{(b + c + a)\,(b + c - a)}{2\,b\,c} = \frac{2\,p\,2\,(p - a)}{2\,b\,c} = \frac{4\,p\,(p - a)}{2\,b\,c}$$

se supone el perímetro $a + b + c = 2\,p$ y restando de este valor $2\,a\ \ 2\,b\ \ 2\,c$ sucesivamente, se tiene

$$\left.\begin{aligned} b + c - a &= 2\,p - 2\,a = 2\,(p - a) \\ a + c - b &= 2\,p - 2\,b = 2\,(p - b) \\ b + a - c &= 2\,p - 2\,c = 2\,(p - c) \end{aligned}\right\}$$

Si dividimos el primero y último miembro de la igualdad obtenido anteriormente por 2, se tiene $\cos.^2 \frac{A}{2} = \frac{p\,(p - a)}{b\,c}$ de donde $\cos \frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p - a,)}{\acute{o}\,c}}$ fórmula calculable por logaritmos y que puede traducirse en lenguaje.

Lo mismo calcularíamos el valor de los otros ángulos $\cos. \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{p\,(p - b)}{a\,c}}$ $\cos. \frac{C}{2} \sqrt{\frac{p\,(p - c)}{a\,b}}$.

54. En función de los senos calcularemos los ángulos análogamente; partiendo de la fórmula $2 \text{ sen.}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos. A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2\,b\,c} = \frac{2\,b\,c - b^2 - c^2 + a^2}{2\,b\,e} =$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc} = \frac{2(p-c)\,2(p-b)}{2bc} =$$

$= \dfrac{4(p-b)(p-c)}{2bc}$ y como anteriormente, dividiendo por 2, el 1.º y último miembro se tiene $\text{sen.}^2 \dfrac{A}{2} = \dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}$ de donde $\text{sen. } A = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}$ lo mismo hallaríamos $\text{sen. } \dfrac{B}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-c)}{ac}}$ y $\text{sen. } \dfrac{C}{2} = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab}}$.

55. Conocidos el seno y coseno, se determinarían los ángulos en función de la tangente por la fórmula $\text{tag. } \dfrac{A}{2} = \dfrac{\text{sen. } \dfrac{A}{2}}{\text{cos. } \dfrac{A}{2}} = \dfrac{\sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{bc}}}{\sqrt{\dfrac{p(p-a)}{bc}}} = \sqrt{\dfrac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$ fórmulas análogas hallaríamos para tag. $\dfrac{B}{2}$ y tag. $\dfrac{C}{2}$.

Cuando tengamos que hallar solo un ángulo, la fórmula que tiene más ventaja emplear es la del coseno, pero en caso de hallar los otros dos, nos conviene la de la tangente, pues solo habrá que hallar cuatro logaritmos, y en el segundo caso, siete.

ERRATAS

	Dice	Debe decir
Página 13 (Fig. 3.ª)	a	α
» 32	$\cos. p - \cos. q. = = 2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p+q) \text{ sen. } \frac{1}{2}(p-q)$	$\cos. p - \cos. q = = -2 \text{ sen. } \frac{1}{2}(p+q) \text{ sen. } \frac{1}{2}(p-q)$
» 45	ang.$^{\circ}$ 1 = ang.$^{\circ}$ 1'	ang.$^{\circ}$ 1 = ang.$^{\circ}$ 1

Esta obra se halla de venta en la casa de los Sres. Villardefrancos,

principales librerías y en el domicilio del autor

Colegio General y Técnico, Juana de Vega n.º 35 - 1.º y 2.º